



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ : «Μοντελοποίηση φόρτισης από σημειακές πηγές
ρύπανσης»**



Μάθημα: Εφαρμογές σε Περιβαλλοντικά Μοντέλα	
Ονοματεπώνυμο & ΑΜ Φοιτητή	Κυριακή Θεοχάρη 2018050043
Είδος Αναφοράς :	Ατομική
Ημερομηνία Εκτέλεσης :	10/11/2022
Ημερομηνία Παράδοσης	24/11/2022
Όνομα Αναφοράς	Εργαστήριο 1: «Μοντελοποίηση φόρτισης από σημειακές πηγές ρύπανσης»



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ : «Μοντελοποίηση φόρτισης από σημειακές πηγές ρύπανσης»

Εισαγωγή

Η λίμνη Λυσιμαχία βρίσκεται νότια του νομού Αιτωλοακαρνανίας, της Στερεάς Ελλάδας και απέχει 5 χλμ. από την πόλη του Αγρινίου. Σχηματίζεται μεταξύ των βουνών Παναιτωλικού και Αράκυνθου, από τα οποία τροφοδοτείται και τα νερά της. Απέχει από την Τριχωνίδα 2 χλμ., αφού τις χωρίζει μόνο μία λωρίδα ξηράς. Τα πλεονάζοντα νερά της διοχετεύονται με την διώρυγα του Δίμηκου στον Αχελώο, δυτικά του Αγγελόκαστρου. Με διώρυγα συνδέεται και με την Τριχωνίδα, της οποίας δέχεται τα πλεονάζοντα νερά. Έχει σχήμα επίμηκες με χαμηλές όχθες. Το μέγιστο μήκος της είναι 6 χλμ. και το πλάτος της περίπου 3 χλμ., ενώ η επιφάνειά της φθάνει τα 13 τετ. χλμ.

Πρόβλημα

Ένα εργοστάσιο βιολογικού καθαρισμού εμπλουτίζει ένα ποτάμι με 5000 kg/year διαλυτό φωσφόρο. Το ποτάμι αυτό εισρέει στη λίμνη Λυσιμαχία, που βρίσκεται στο νομό Αιτωλοακαρνανίας, με παροχή $6 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{year}$. Η αρχική συγκέντρωση του διαλυτού φωσφόρου στη λίμνη είναι $8 \text{ } \mu\text{g/L}$. Ο όγκος της λίμνης είναι 107 m^3 και ο συντελεστής καθίζησης του φωσφόρου $0,05/\text{day}$.

Μεθοδολογία-Αποτελέσματα

Στο παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα δεδομένα της εργαστηριακής ασκήσεως

Πίνακας 1

Δεδομένα Λίμνης Λυσιμαχία				
Όρος	Τιμή	Μονάδες	Μετά την μετατροπή	
			Τιμή	Μονάδες
Φορτίο W	5000	kg/year	13698630137	$\mu\text{g/day}$
Παροχή ποταμού	6000000	m^3/year	16438356,16	L/day
Co	8	$\mu\text{g/L}$		
V	10000000	m^3	10000000000	L
ks	0,05	/day		
Χρόνος παρανομής	608,3333	days		

Ερώτημα 1°

Να γραφτεί το ισοζύγιο μάζας του φωσφόρου για τη λίμνη Λυσιμαχία υποθέτοντας ότι υπάρχει σταθερή ροή.

Ισοζύγιο μάζας του φωσφόρου





$$\frac{d(VC)}{dt} = Q_{in} * C_{in} - Q_{out} * C_{out} \pm r * V$$

$$\text{Όπου } W = Q_{in} * C_{in}$$

$$r = -k_s * C \text{ (1}^{\text{ης}} \text{ τάξης αντίδραση)}$$

$$\text{Και αφού υπάρχει σταθερή ροή η } Q_{in} = Q_{out} = Q$$

Στη συνέχεια διαιρώντας με τον όγκο(V) η εξίσωση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - \frac{Q}{V} * C - k_s * C$$

$$\text{όπου } \tau = \frac{V}{Q} \text{ (Μέσος υδραυλικός χρόνος παραμονής)}$$

Άρα το ισοζύγιο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - \frac{C}{\tau} - k_s * C \Rightarrow \frac{W}{V} = \frac{dC}{dt} + C * \left(\frac{1}{\tau} + k_s \right)$$

Ερώτημα 2^ο

Να γίνει η αναλυτική λύση της διαφορικής εξίσωσης για το ισοζύγιο του 1^{ου} ερωτήματος.

Από το ισοζύγιο μάζας(1^ο ερώτημα) παρατηρείτε ότι είναι διαφορική εξίσωση και συγκεκριμένα μη ομογενής γραμμική εξίσωση 1^{ης} τάξης της μορφής: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

$$\text{Όπου } y' = \frac{dC}{dt}$$

$$p(x) = \left(\frac{1}{\tau} + k_s \right)$$

$$y = C$$

$$q(x) = \frac{W}{V}$$

Με γενική λύση:

$$y = y_o \cdot e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \cdot \int_0^t e^{P(t)} \cdot q(t) \cdot dt \quad (1)$$

Όπου:

$$\left. \begin{array}{l} P(t) = \int p(t) dt \\ p(t) = \left(k_s + \frac{1}{\tau} \right) \end{array} \right\} P(t) = \int \left(k_s + \frac{1}{\tau} \right) dt = \left(k_s + \frac{1}{\tau} \right) t$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση(1):

$$(1) \Rightarrow C = C_o \cdot e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} \cdot \int_0^t e^{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} \cdot \frac{W}{V} \cdot dt$$



$$\Rightarrow C = C_o * e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} \cdot \frac{W}{V} * \int_0^t e^{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} * dt$$

$$\Rightarrow C = C_o * e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} * \frac{W}{V} * \int_0^t \frac{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)}{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)} * e^{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} * dt$$

$$\Rightarrow C = C_o * e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} * \frac{W}{V} * \frac{1}{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)} * \int_0^t e^{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} * d\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t$$

$$\Rightarrow C = C_o * e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} * \frac{W}{V} * \frac{1}{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)} * (e^{\left(k_s + \frac{1}{\tau}\right)t} - 1)$$

$$\Rightarrow C = C_o * e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} + \frac{W}{V * \left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)} * \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t}\right) \quad (2)$$

Ερώτημα 3ο

Με τη χρήση του excel να γίνει η αριθμητική λύση του προκύπτει από τη λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα κομμάτι από τον πίνακα των αποτελεσμάτων για την αριθμητικής λύση της διαφορικής εξίσωσης (ολόκληρος ο πίνακας παρουσιάζεται στο παράρτημα Πίνακας 3), συνολικά έγινε ο υπολογισμός για 272 μέρες. Ενδεικτικά γίνεται ο υπολογισμός της συγκέντρωσης του φωσφόρου της δεύτερης γραμμής με τον τρόπο που υπολογίστηκε και στο excel με την εξίσωση (2).

$$C = C_o * e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t} + \frac{W}{V * \left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)} * \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)t}\right)$$

$$= 8 * e^{-\left(\frac{1}{608,33} + 0,05\right) \cdot 1} + \frac{13698630137}{10000000000 * \left(\frac{1}{608,33} + 0,05\right)} * \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{608,33} + 0,05\right) \cdot 1}\right)$$

$$= 8,93 \frac{\mu g}{L}$$

Πίνακας 1

Χρόνος t(days)	Συγκέντρωση C($\mu g/day$)
0	8
1	8,93242802
2	9,817924181
3	10,6588507
4	11,45745091
5	12,2158552
6	12,93608677
7	13,62006695



8	14,26962039
9	14,88647988
10	15,47229101
11	16,02861654
12	16,55694056
13	17,05867247
14	17,53515073
15	17,98764643
16	18,41736668
17	18,82545784

Ερώτημα 4^ο

Όπως και με το προηγούμενο ερώτημα να γίνει η αριθμητική λύση με τη χρήση του excel να σύμφωνα με τη μέθοδο Euler.

Για τον υπολογισμό της αριθμητικής λύσης με την μέθοδο Euler χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη εξίσωση:

$$C_{i+1} = C_i + \frac{dC}{dt} \cdot \Delta t \quad (3)$$

Όπου: Δt = το χρονικό βήμα (για το συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέχθηκε το χρονικό βήμα ανά 1 μέρα)

$\frac{dC}{dt}$ = το ισοζύγιο και ισουτε με $\frac{W}{V} - C \cdot \left(\frac{1}{\tau} + k_s\right)$ (1ο ερώτημα) όπου το C_i αντιστοιχεί στις τιμές που υπολογίστηκαν στο 3ο ερώτημα.

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα ακολουθεί ενδεικτικά ο υπολογισμός της συγκέντρωσης του φωσφόρου με την μέθοδο Euler της δεύτερης γραμμής με τον τρόπο που υπολογίστηκε και στο excel (εξίσωση(3)).

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + \frac{dC}{dt} \cdot \Delta t \\ &= 8 + \left(\left(\frac{13698630137}{10000000000} \right) - 8 \cdot \left(\frac{1}{608,33} \cdot 0,05 \right) \right) \cdot 1 \\ &= 9,84 \frac{\mu g}{L} \end{aligned}$$

Παρακάτω απεικονίζετε ένα κομμάτι του πίνακα με τα αποτελέσματα για την συγκέντρωση του φωσφόρου με την μέθοδο του Euler (ολόκληρος ο πίνακας παρουσιάζεται στο παράρτημα Πίνακας 4).

Πίνακας 2

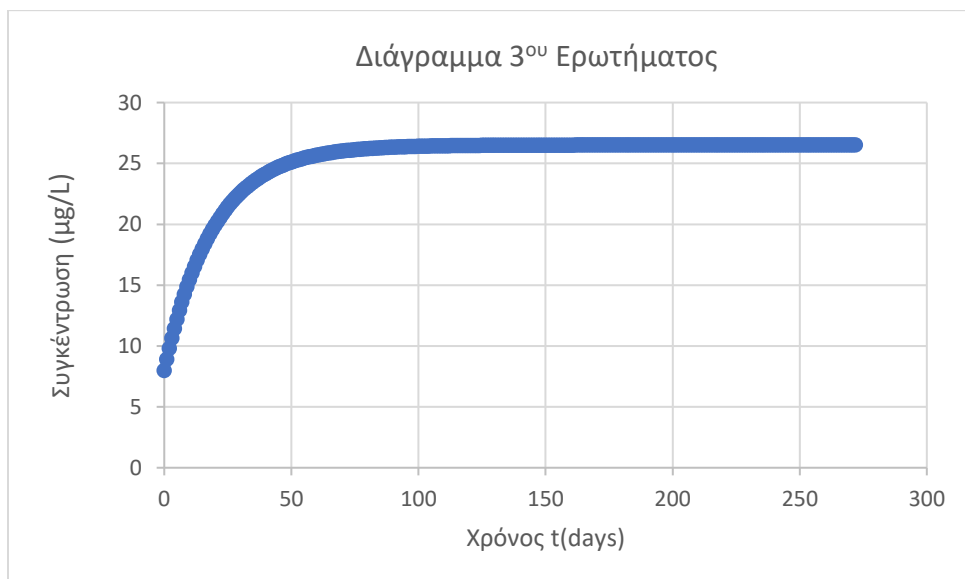
Χρόνος t(days)	$C_{i+1} \left(\frac{\mu g}{L} \right)$
0	8
1	9,840986

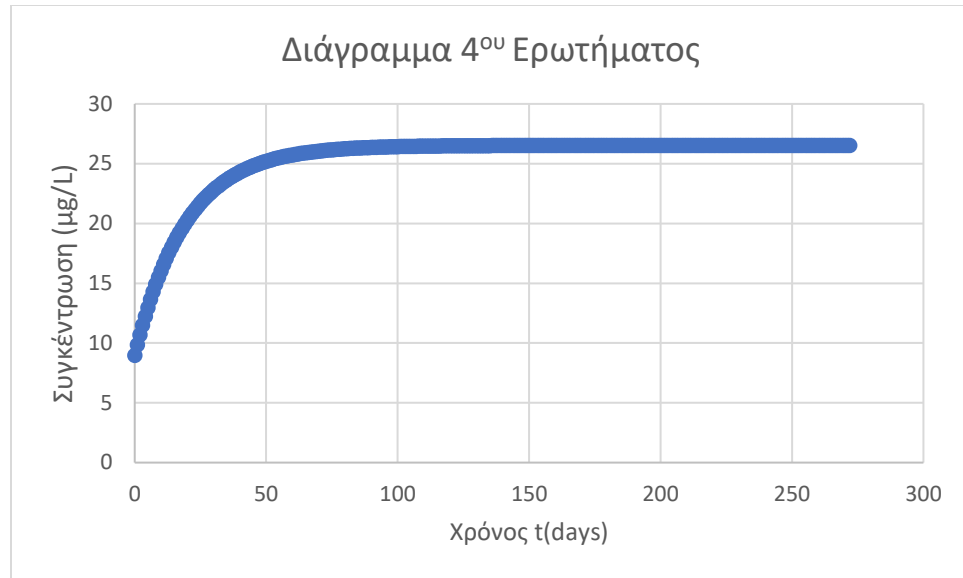


2	10,68075
3	11,47825
4	12,23561
5	12,95484
6	13,63788
7	14,28654
8	14,90255
9	15,48755
10	16,04311
11	16,5707
12	17,07174
13	17,54756
14	17,99943
15	18,42856
16	18,83609
17	19,2231

5ο ερώτημα

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα που θα παρουσιάζουν την αλλαγή της συγκέντρωσης με τον χρόνο για τα ερωτήματα 3 και 4.





Και στα δυο διαγράμματα παρατηρείτε μια συνεχής αύξηση της συγκέντρωσης του φωσφόρου μέχρι την 50 ημέρα και μετά αρχίζει και σταθεροποιείται περίπου στο 26 με 27 $\frac{\mu g}{L}$. Επίσης και τα δυο διαγράμματα έχουν την ίδια μορφή και ξεκινούν να σταθεροποιούνται και τα δυο στις 50 ημέρες.

6^ο Ερώτημα

Να υπολογιστεί η συγκέντρωση του φωσφόρου για την λίμνη αν είναι κάτω από σταθερές συνθήκες και σε ποια τροφική κατάσταση βρίσκεται η λίμνη.

Για σταθερές συνθήκες ισχύει $\frac{dC}{dt} = 0$

Άρα από την εξίσωση του ισοζυγίου της μάζας που βρέθηκε:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{W}{V} - C \cdot \left(\frac{1}{\tau} + k_s \right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{W}{V} - C \cdot \left(\frac{1}{\tau} + k_s \right)$$

$$\Rightarrow C_{ss} = \frac{W}{V \cdot \left(\frac{1}{\tau} + k_s \right)}$$

$$= \frac{13698630137}{10000000000 \cdot \left(\frac{1}{608,33} + 0,05 \right)}$$

$$= 26,53 \frac{\mu g}{L}$$

Άρα η τροφική κατάσταση που βρίσκεται η λίμνη είναι ευτροφική γιατί η συγκέντρωση του φωσφόρου ξεπερνά τα 20 $\frac{\mu g}{L}$.



7ο ερώτημα

Στο τελευταίο ερώτημα ζητείτε να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι η συγκέντρωση του φωσφόρου να μειωθεί κατά 50% αν ο βιολογικός σταματούσε να ρίχνει φορτία στη λίμνη και δεν υπάρχει επαναφορά του φωσφόρου από το ίζημα.

Αφού δεν υπάρχει επαναφορά του φωσφόρου από το ίζημα τότε ο συντελεστής καθίζησης (k_s) ισούται με 0 και επίσης 0 είναι και το φορτίο w γιατί αναφέρει ότι ο βιολογικός σταμάτησε να ρίχνει φορτία στη λίμνη.

Από την εξίσωση του ισοζυγίου γίνεται αντικατάσταση των παραπάνω:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{w}{V} - C \cdot \left(\frac{1}{\tau} + k_s \right) \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{C}{\tau} \Rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_C^{\frac{C_o}{2}} \frac{dC}{C} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left(\frac{C}{C_o} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow C = C_o * e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Αφού η συγκέντρωση μειώθηκε 50% η C γίνεται $C = \frac{C_o}{2}$ οπότε αν αντικατασταθεί στην παραπάνω εξίσωση και λυθεί ως προς t υπολογίζετε ο χρόνος που χρειάζεται η συγκέντρωση του φωσφόρου να μειωθεί κατά 50%.

$$\frac{C_o}{2} = C_o * e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \ln(1) - \ln(2) = -\frac{t}{\tau}$$

$$\Rightarrow t = \ln(2) * \tau \Rightarrow t = \ln(2) * 608,33 = 421,66 \text{ days}$$

Βιβλιογραφία

1. Εργαστηριακές σημειώσεις μαθήματος, «Εφαρμογές σε Περιβαλλοντικά Μοντέλα»
2. Jerald L. ,Περιβαλλοντικά Μοντέλα, 2^η Έκδοση, Έκδοσης Τζιόλα, 2017
3. Οι φυσικές λίμνες της Αιτωλοακαρνανίας: Λυσιμαχία

Παράρτημα

Πίνακας 4

Ερώτημα 3

Χρόνος t(days)	$e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k_s\right) \cdot t}$	$1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k_s\right) \cdot t}$	$C_o * e^{-\left(\frac{1}{\tau}+k_s\right) \cdot t}$	Συγκέντρωση $C(\mu g/m^3)$
0	1	0	8	8,93242802
1	0,949667044	0,050332956	7,597336354	8,93242802
2	0,901867495	0,098132505	7,214939959	9,817924181



3	0,856473838	0,143526162	6,851790705	10,6588507
4	0,813364978	0,186635022	6,506919826	11,45745091
5	0,772425915	0,227574085	6,179407318	12,2158552
6	0,733547435	0,266452565	5,868379482	12,93608677
7	0,696625825	0,303374175	5,573006597	13,62006695
8	0,661562588	0,338437412	5,292500702	14,26962039
9	0,628264187	0,371735813	5,026113498	14,88647988
10	0,596641794	0,403358206	4,77313435	15,47229101
11	0,566611049	0,433388951	4,53288839	16,02861654
12	0,53809184	0,46190816	4,304734719	16,55694056
13	0,511008087	0,488991913	4,088064696	17,05867247
14	0,48528754	0,51471246	3,882300317	17,53515073
15	0,460861583	0,539138417	3,686892666	17,98764643
16	0,437665058	0,562334942	3,501320461	18,41736668
17	0,415636082	0,584363918	3,325088653	18,82545784
18	0,394715889	0,605284111	3,157727112	19,21300857
19	0,374848672	0,625151328	2,998789373	19,58105272
20	0,35598143	0,64401857	2,84785144	19,93057213
21	0,338063832	0,661936168	2,70451066	20,26249919
22	0,321048081	0,678951919	2,568384644	20,57771938
23	0,304888782	0,695111218	2,439110253	20,8770736
24	0,289542828	0,710457172	2,316342625	21,16136045
25	0,274969282	0,725030718	2,199754254	21,43133829
26	0,261129265	0,738870735	2,08903412	21,68772736
27	0,247985857	0,752014143	1,983886858	21,9312116
28	0,235503996	0,764496004	1,884031968	22,16244056
29	0,223650384	0,776349616	1,789203071	22,38203109
30	0,212393399	0,787606601	1,699147192	22,59056897
31	0,201703011	0,798296989	1,613624091	22,78861053
32	0,191550703	0,808449297	1,532405621	22,97668407
33	0,18190939	0,81809061	1,455275117	23,15529131
34	0,172753352	0,827246648	1,382026818	23,32490872
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
253	2,1162E-06	0,999997884	1,69296E-05	26,52515974
254	2,00968E-06	0,99999799	1,60775E-05	26,52516171
255	1,90853E-06	0,999998091	1,52682E-05	26,52516358
256	1,81247E-06	0,999998188	1,44997E-05	26,52516536
257	1,72124E-06	0,999998279	1,37699E-05	26,52516705
258	1,6346E-06	0,999998365	1,30768E-05	26,52516866
259	1,55233E-06	0,999998448	1,24186E-05	26,52517018
260	1,4742E-06	0,999998526	1,17936E-05	26,52517163
261	1,4E-06	0,9999986	1,12E-05	26,525173
262	1,32953E-06	0,99999867	1,06362E-05	26,52517431
263	1,26261E-06	0,999998737	1,01009E-05	26,52517555



264	1,19906E-06	0,999998801	9,59248E-06	26,52517673
265	1,13871E-06	0,999998861	9,10966E-06	26,52517784
266	1,08139E-06	0,999998919	8,65115E-06	26,52517891
267	1,02696E-06	0,999998973	8,21571E-06	26,52517991
268	9,75273E-07	0,999999025	7,80219E-06	26,52518087
269	9,26185E-07	0,999999074	7,40948E-06	26,52518178
270	8,79567E-07	0,99999912	7,03654E-06	26,52518264
271	8,35296E-07	0,999999165	6,68237E-06	26,52518346
272	7,93253E-07	0,999999207	6,34603E-06	26,52518424

Πίνακας 5

Ερώτημα 4				
Χρονικό Βήμα (Δt)	Χρόνος t(days)	Συγκέντρωση $C(\frac{\mu g}{L})$	dc/dt	$C_{i+1}(\frac{\mu g}{L})$
1	0	8	0,956712	8,956712
1	1	8,93242802	0,908558	9,840986
1	2	9,817924181	0,862828	10,68075
1	3	10,6588507	0,819399	11,47825
1	4	11,45745091	0,778156	12,23561
1	5	12,2158552	0,738989	12,95484
1	6	12,93608677	0,701794	13,63788
1	7	13,62006695	0,666471	14,28654
1	8	14,26962039	0,632925	14,90255
1	9	14,88647988	0,601068	15,48755
1	10	15,47229101	0,570815	16,04311
1	11	16,02861654	0,542084	16,5707
1	12	16,55694056	0,514799	17,07174
1	13	17,05867247	0,488888	17,54756
1	14	17,53515073	0,464281	17,99943
1	15	17,98764643	0,440912	18,42856
1	16	18,41736668	0,41872	18,83609
1	17	18,82545784	0,397644	19,2231
1	18	19,21300857	0,37763	19,59064
1	19	19,58105272	0,358622	19,93968
1	20	19,93057213	0,340572	20,27114
1	21	20,26249919	0,32343	20,58593
1	22	20,57771938	0,307151	20,88487
1	23	20,8770736	0,291691	21,16876
1	24	21,16136045	0,277009	21,43837
1	25	21,43133829	0,263067	21,6944



1	26	21,68772736	0,249826	21,93755
1	27	21,9312116	0,237251	22,16846
1	28	22,16244056	0,22531	22,38775
1	29	22,38203109	0,213969	22,596
1	30	22,59056897	0,203199	22,79377
1	31	22,78861053	0,192972	22,98158
1	32	22,97668407	0,183259	23,15994
1	33	23,15529131	0,174035	23,32933
1	34	23,32490872	0,165275	23,49018
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
1	252	26,52515766	2,13E-06	26,52516
1	253	26,52515974	2,02E-06	26,52516
1	254	26,52516171	1,92E-06	26,52516
1	255	26,52516358	1,83E-06	26,52517
1	256	26,52516536	1,73E-06	26,52517
1	257	26,52516705	1,65E-06	26,52517
1	258	26,52516866	1,56E-06	26,52517
1	259	26,52517018	1,49E-06	26,52517
1	260	26,52517163	1,41E-06	26,52517
1	261	26,525173	1,34E-06	26,52517
1	262	26,52517431	1,27E-06	26,52518
1	263	26,52517555	1,21E-06	26,52518
1	264	26,52517673	1,15E-06	26,52518
1	265	26,52517784	1,09E-06	26,52518
1	266	26,52517891	1,03E-06	26,52518
1	267	26,52517991	9,83E-07	26,52518
1	268	26,52518087	9,33E-07	26,52518
1	269	26,52518178	8,86E-07	26,52518
1	270	26,52518264	8,41E-07	26,52518
1	271	26,52518346	7,99E-07	26,52518
1	272	26,52518424	7,59E-07	26,52519